Лекция 8 Признаки сходимости числового ряда: Даламбера, Коши и интегральный признак

Цель лекции:

Сформировать у студентов умение применять классические признаки сходимости ряда — признаки Даламбера, Коши и интегральный признак — для исследования поведения бесконечных рядов.

Основные вопросы:

1. **Признак Даламбера (отношений).**
2. **Признак Коши (радикальный).**
3. **Интегральный признак сходимости.**
4. **Связь признаков между собой и области применения каждого.**

Рассмотрим ччисловой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема 4. (Признак Даламбера)

Пусть у ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k > 0$ существует предел отношений

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}, \qquad (6)$$

тогда:

1. если $q < 1$, то этот ряд сходится,

2. если $q > 1$ или $q = \infty$ этот ряд расходится.

При $q = 1$ данный признак не применим.

Теорема 5. (Радикальный признак Коши). Пусть в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k > 0$, существует предел

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}. \qquad (8)$$

тогда:

1. если $q < 1$, то этот ряд сходится,

2. если $q > 1$ или $q = \infty$,то этот ряд расходится.

При $q = 1$, как и в предыдущем случае, признак Коши не применим.

Пример . Исследуем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$.

Вычислим требуемый предел.

$$q=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}=\lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{-1}=e^{-1}$$

. (Второй замечательный предел).

Поскольку $q<1$, то исходный ряд сходится.

Теорема 6. (Интегральный признак Коши). Пусть имеется ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$

и пусть $a_n=f(n)$, $f(x)$ - неотрицательная монотонно убывающая функция на промежутке $[1,+\infty)$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится)

несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ (9)

Пример 9. Исследуем сходимость ряда Дирихле для различных p: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$.

Функция $y=f(x)=\frac{1}{x^p}$ получается путем замены индекса суммирования k на x. При $p>0$ она удовлетворяет всем условиям теоремы. Она непрерывна, в промежутке $[1,+\infty)$, т.к. имеет разрыв только в точке $x=0;\quad f(x)>0$ в этом промежутке и убывает в нем, т.к. ее знаменатель возрастает с ростом x.

Пусть $p>1$, тогда $\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}x^{-p}dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_0^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}=\frac{1}{p-1}$,

т.е. при $p>1$ этот интеграл и ряд Дирихле сходятся.

При $p<1$ этот интеграл и ряд Дирихле расходятся. При $p=1$

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_0^{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln 1=\infty$$

.

при $p \le 0$ члены ряда Дирихле не стремятся к нулю, поэтому он расходится согласно следствию из необходимого признака.

Контрольные вопросы

1. **В чём заключается признак Даламбера?**
2. **Как формулируется признак Коши?**
3. **Какие условия применимости интегрального признака?**
4. **Почему в признаках Даламбера и Коши важен предел <, > или = 1?**
5. **Приведите пример ряда, к которому удобно применять признак Даламбера.**
6. **Приведите пример ряда, удобного для признака Коши.**
7. **Почему интегральный признак не работает для немонотонных функций?**

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика

8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.

9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.